Matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Trace nulle, déterminant -1, hermitiennes

$$\sigma_x^{\ 2} = \sigma_y^{\ 2} = \sigma_z^{\ 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anticommutateurs : $\left\{\sigma^i, \sigma^j\right\} = 0$ si $i \neq j$

Commutateurs : $\left[\sigma_x, \sigma_y\right] = 2i\sigma_z$; $\left[\sigma_y, \sigma_z\right] = 2i\sigma_x$; $\left[\sigma_z, \sigma_x\right] = 2i\sigma_y \Leftrightarrow \left[\sigma_i, \sigma_j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

avec : $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ pour les permutations circulaires de } 123 \\ -1 \text{ pour les autres permutations de } 123 \\ 0 \text{ si deux indices sont identiques} \end{cases}$

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} I_2 + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k \Rightarrow \left(\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b}\, I_2 + i\vec{\sigma}\cdot\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right) \text{ avec } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices de Dirac :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} ; \gamma^{1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{x,y,z} \\ -\sigma_{x,y,z} & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminant +1

γ^0 hermitienne, $\gamma^{1,2,3}$ antihermitiennes

Anticommutateurs :

$$\left\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\right\} = 2\eta^{\mu\nu} I_4 \text{ avec } I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traces :

$$Tr\left(\gamma^\mu\right) = 0 \quad Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right) = 4\eta^{\mu\nu}$$

Trace du produit d'un nombre impair de matrices γ nulle (à cause des anticommutateurs)

$$Tr\left(\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\eta\gamma^\nu\right) = Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\eta\gamma^\nu\gamma^\rho\right) = -Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\eta\gamma^\rho\gamma^\nu\right) + 2\eta^{\rho\nu}Tr\left(\gamma^\mu\gamma^\eta\right) = \ldots$$
$$= 4(\eta^{\rho\mu}\eta^{\eta\nu} - \eta^{\rho\eta}\eta^{\mu\nu} + \eta^{\rho\nu}\eta^{\mu\eta})$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \quad ; \quad \left(\gamma^5\right)^2 = I_4 \quad ; \quad \left\{\gamma^5, \gamma^\mu\right\} = 0$$

Si une matrice 4×4 commute avec toutes les matrices γ elle est proportionnelle à I_4.

Matrices de Gell-Mann :

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Hermitiennes, trace nulle

$$Tr\left(\lambda_a \lambda_b\right) = 2\delta_{ab}$$

$\left[\frac{\lambda_a}{2}, \frac{\lambda_b}{2}\right] = i f_{abc} \frac{\lambda_c}{2}$ avec : $f_{abc} = -\frac{i}{4} Tr\left(\lambda_a \left[\lambda_b, \lambda_c\right]\right)$

D'où **:**

$f_{abc} = f_{cab} = f_{bca} = -f_{bac} = -f_{acb}$:
antisymétrie par échange de deux indices et
invariance par permutation circulaire des indices

Valeurs :

$f_{123} = 1$; $f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} = 1/2$; $f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2$

Les constantes non définies par les relations ci-dessus sont nulles.